*Φυλλάδιο 1 (Απειροστικός λογισμός ΙΙ)*

**1.** Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις παρακάτω σειρές

Α) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+1/k}}$, Β) $\sum_{k=1}^{\infty}(1-e^{-1/k})$, Γ) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\ln(1+\frac{1}{k})}$, Δ) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(\frac{1}{\sqrt{k}})$,

Ε) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln k)^{\ln k}}$.

**2.** Δίνονται δύο ακολουθίες θετικών αριθμών $(a_k)$, $(b_k)$ ώστε οι αντίστοιχες σειρές $\sum_k a_k$ και $\sum_k b_k$ να συγκλίνουν. Να δειχθεί ότι η σειρά $\sum_k a_k b_k$ συγκλίνει. Ισχύει το ίδιο συμπέρασμα για αυθαίρετες ακολουθίες αριθμών ?

**3.** Δίνεται ακολουθία θετικών αριθμών $(a_k)$, ώστε $a_k \to 0$. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_k {a_k}^k$ συγκλίνει.

**4.** Δίνεται ακολουθία θετικών αριθμών $(a_k)$, ώστε $a_k \to 0$. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία της $(a_{n_k})$ ώστε η σειρά $\sum_k a_{n_k}$ να συγκλίνει. Ισχύει το ίδιο συμπέρασμα αν παραλείψουμε την υπόθεση ότι η $(a_k)$ είναι θετικών όρων ?

**5.** Δίνεται ακολουθία θετικών αριθμών $(a_k)$, ώστε η σειρά $\sum_k a_k$ να συγκλίνει. Δείξτε ότι για κάθε υπακολουθία της $(a_{n_k})$, η σειρά $\sum_k a_{n_k}$ συγκλίνει

**6.** Εξετάστε ως προς την απλή και απόλυτη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές

Α) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k\ln k}$, Β) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+a)^l(k+b)^s}$, $l,s,a,b>0$

**7.** Έστω ότι η σειρά $\sum_k a_k$ συγκλίνει και η ακολουθία $(b_k)$ είναι φθίνουσα και συγκλίνουσα. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_k a_k b_k$ συγκλίνει.

**8.** Δείξτε ότι αν οι σειρές $\sum_k a_{2k}$ και $\sum_k a_{2k+1}$ συγκλίνουν τότε και η σειρά $\sum_k a_k$ συγκλίνει. Το αντίστροφο ισχύει ? Τι συμβαίνει αν η $(a_k)$ είναι θετικών όρων

.